数理解析研究所講究録
444巻 1981年 96-117

不変部分環が完全交叉になるための条件について

名工大　渡辺 敬一

序

この稿では，"不変式環の可換環論"を扱いたい。ホモロジー代数と結びついて発展してきた，可換環の性質の系列に於て，

多項式環 regular ⇒ 超曲面 hypersurface ⇒ 完全交叉 complete intersection ⇒

⇒ Gorenstein ⇒ Cohen-Macaulay

という性質がある。

今，kを体とし，Gを$GL(n,k)$の有限部分群で，位数$|G|$がkで$\neq 0$であるものとする（大体$k=\mathbb{C}$と思っているが）このときGの vector space kへの作用は，自然に多項式環 $S=k[X_1,\cdots,X_n]$ への作用に拡張される。このとき，不変部分環 $R=S^G=\{f\in S \mid \forall\sigma\in G,\ \sigma(f)=f\}$ が上の性質のどれをみたし，どれをみたさないか？という事を考えるのがこの稿の目的である。上記の性質のうち，regular, Gorenstein, Cohen-Macaulay（C.-M.と略記する）については既に解答が

得られているので，従って R がいつ超曲面又は完全交叉（以下 C.I. と略記する）になるか？というのがここでの問題だが，現在まだ解答は得られていないし，"きれいな形の"解答が得られる見込みも少い気がする。しかし，問題を考えて行く際に使ういろいろな"代数幾何的"な環論は面白いのではないかと思うし，一方で，「$R = S^G$ が完全交叉となる $G \subset GL(n, k)$ を完全に分類せよ」という設問から，何らかの群論的に興味ある問題が生ずるのではないかという希望もある。

ただ，この稿のような設問では、不変式環という非常に面白い，多様なものを扱うにはきめが粗すぎるという感がある。

「不変式環の可換環論では何を考えれば良いか？」

という問題が残されていると思っている。

§1. いくつかの既知の事柄について．

この節ではいくつかの既知の事実を羅列的に並べて行く．

<u>Th</u> 1. (Chevalley, Shephard-Todd, [2], [13]) R が regular

$\Longleftrightarrow$ $R = k[f_1, \cdots, f_n]$ （$f_1, \cdots, f_n$ は代数的独立）

$\Longleftrightarrow$ G が pseudo-reflection で生成されている．但し，$g \in GL(n, k)$ が pseudo-reflection とは，g の位数が有限で，g は 1 以外の固有値をただ一つもつ（i.e. $\operatorname{rank}(g - I) = 1$）こと．

序でことわったように，吾々は常に $|G| \neq 0$ in k のときを考えているが，$|G|=0$ の時は事態は非常に複雑である。（中島晴久，[20]，[21] 参照）

<u>Proposition</u> 2.（[4]）　R は常に Cohen-Macaulay ring である。別の言い方をすると，$\exists R' = k[f_1, \cdots, f_n] \subset R$，$R'$ は多項式環で，R は R' 上有限生成自由加群.

<u>Theorem</u> 3.（[17]）　G が pseudo-reflection を含まないとき，R が Gorenstein 環 $\Longleftrightarrow$ $G \subset SL(n, k)$.

G が pseudo-reflection を含むとき，H を G の ps.-ref. 全体で生成される G の subgroup とすると，$H \triangleleft G$ で，G/H は，$S^H = k[f_1, \cdots, f_n]$ の上に linear に作用する。この G/H の作用は ps.-ref をもたないから，原理的には，R が Gorenstein かどうかはこうして判定できる事になる。

（4）　$P(R,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \dim_k R_m \cdot t^m \in \mathbb{Z}[[t]]$　を R の Poincaré series と呼ぶ（$R_n = \{ f \in R \mid f$ は homog.，$\deg(f)=n \}$）このとき，$P(R,t)$ は t の<u>有理函数</u>となる事が知られている。以下の等式は有理函数としての等式である。

(a)（ch $k=0$ のとき），　$P(R,t) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(I - gt)}$

(b)　$f_1, \cdots, f_n \in R$，同次式を，R が $k[f_1, \cdots, f_n]$ 上 finite であるようにとると，R は $k[f_1, \cdots, f_n]$ 上 free で（Prop.2），

$\deg(f_i)=d_i$ とおくと，

$$P(R,t)=\frac{P(R/(f_1,\cdots,f_n),t)}{\prod_{i=1}^{n}(1-t^{d_i})}=\frac{F(t)}{\prod_{i=1}^{n}(1-t^{d_i})}\quad\cdots(*)$$

$F(t)\in\mathbb{N}[t]$ かつ，$\deg(F(t))\leqq\sum_{i=1}^{n}d_i-n$，

上の式で等号成立 $\Longleftrightarrow$ $G\subset SL(n,k)$ （[15],[14]参照）

(c)（R. Stanley, [15]） R が Gorenstein $\Longleftrightarrow$ $\exists a\in\mathbb{Z}$，

$t^a\cdot P(R,t^{-1})=(-1)^n\cdot P(R,t)$.

上の (b)の(*) に於て，$a+\sum_{i=1}^{n}d_i=\deg F$ で，$F=\sum_{i=0}^{d}c_it^i$

とおくとき（$d=\deg F$），$c_i=c_{d-i}$ が成立する。

(d) R が C.I.，$R\cong k[Y_1,\cdots,Y_{n+r}]/(f_1,\cdots,f_r)$

と書くとき，$P(R,t)=\dfrac{\prod_{j=1}^{r}(1-t^{e_j})}{\prod_{i=1}^{n+r}(1-t^{d_i})}$ $(d_i=\deg(Y_i),e_j=\deg(f_j))$.

特に，上の (b)の(*)に於て Rが C.I. ならば，$F(t)$は円分多項式の積である。

<u>問題</u>. Rの生成元と関係式がわかれば，$P(R,t)$ がわかるわけだが，逆に，$P(R,t)$ から（Gに何か条件をつけて），Rの生成元の次数と関係式の次数がわからないだろうか？

例えば，「$P(R,t)=\prod_{j=1}^{r}(1-t^{e_j})/\prod_{i=1}^{n+r}(1-t^{d_i})$ と書ければ，Rは完全交叉で生成元として $d_1,\cdots,d_{n+r}$ を次数とするものが得られる」というのは正しいか？

但し，例えば，$G=\langle(-1,-1,1),(1,1,i)\rangle\subset GL(3,\mathbb{C})$ と

とすると，$P(R,t)=1/(1-t^2)^3$ だが，Rは多項式環ではない（[15], 3.8）。だから，何らかの"normalization"は必要であろう。また，Rが"inv. subring"でないとき，$P(R,t)=(1+t)^3/(1-t)^4$ でRが完全交叉でない例が[15]にある．

（上の問題は講演後に塩田徹治先生にsuggestされたものです.）

（(4) のつづき）

(e) $R\cong k[Y_1,\dots,Y_{n+r}]/(f_1,\dots,f_r)$ が C.I. のとき，

$$|G|=\frac{\prod \deg Y_i}{\prod \deg f_j}.$$

(5) <u>例</u>(a). $G=\left\langle (e_7,e_7^2,e_7^4), \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\right\rangle \subset SL(3,\mathbb{C})$ のとき，

(注). $(a_1,\dots,a_n)\in GL(n,\mathbb{C})$ で，対角線に $a_1,\dots,a_n$ を並べた対角行列をあらわすことにする．$\langle\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_s\rangle$ は $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_s$ で<u>生成される</u>群．

$$P(R,t)=\frac{1+t^5+t^6+t^{11}}{(1-t^3)(1-t^4)(1-t^7)}=\frac{(1-t^{10})(1-t^{12})}{(1-t^3)(1-t^4)(1-t^5)(1-t^6)(1-t^7)}$$

このとき，$R=\mathbb{C}[X^7+Y^7+Z^7,\ XY^3+YZ^3+ZX^3,\ X^3Y^2+Y^3Z^2+Z^3X^2,$

$$X^5Y+Y^5Z+Z^5X,\ XYZ]$$

で，ちゃんと deg $3\sim 7$ の生成元をもち，完全交叉である．

(b) 5次交代群は5次の既約表現をもつ。この表現をGとすると，($G\subset SL(5,\mathbb{C})$). (4)(a)を使って $P(R,t)$ が計算でき，

$$P(R,t)=(1+t^5+2t^6+t^7+t^{12})/(1-t^2)(1-t^3)^2(1-t^4)(1-t^5)$$

となるから，(4)(d) によって，R は C.I. でない．

§2. $R=S^G$ が C.I. であるときのいくつかの一般的性質．

「C.I. になる $R=S^G$ を分類せよ」という設問をすると，§1 の Th 3 から，$G\subset SL(n,k)$ として良い事になる。

以下，$G\subset SL(n,k)$ と仮定する。

まず，次の定理を紹介しよう．

Theorem 6．(Stanley, [16])．$G=\tilde{G}\cap SL(n,k)$，$\tilde{G}$ は reflection group (即ち，G の pseudo-reflection たちで生成された群) とする。更に，

$\mathcal{P}=\{L\subset k^n \mid L$ は $(n-1)$ 次元 linear space, $\exists g\in G, g\neq 1, \forall x\in L, g(x)=x\}$

(reflecting hyperplane の集合)，$L\in\mathcal{P}$ に対して，

$n_L=|\{g\in G \mid \forall x\in L, g(x)=x\}|$，$A=\{n_L \mid L\in P\}$．とおくとき，

(i) $R=k[X_1,\cdots,X_n]^G$ が C.I. $\Leftrightarrow$ 集合 A は完全可約．

(ii) $[\tilde{G}:G]$ が素数のとき R は超曲面．

但し，集合 $A\subset\mathbb{Z}_+$ に対して，次の2つの操作 (T1), (T2) を"許された操作"とし，"許された操作"を繰り返して空集合に達する事ができるとき，A を完全可約という。但し，

(T1)．$A=A_1\cup A_2$ と disjoint union に分割する。但しそのとき，$\forall a\in A_1$，$\forall b\in A_2$，$(a,b)=1$ でなければならない。

(T2)．ある（分割した）組に，公約数があればそれでその

組の元を一斉に割る。その結果1が出たときは取り除く。

例えば，$A=\{2,4,8,3,9\}$ は許された操作で，$A\to\{2,4,8\}\cup\{3,9\}\to\{2,4\}\cup\{3\}\to\{2\}\to\phi$ とできるから完全可約。一方，$A=\{2,3,6\}$ には (T1) も (T2) も行う事ができない。

従って，$G=\langle(-1,-1,1),(1,\omega,\omega)\rangle=$

$$=\langle(-1,1,1),(1,-\omega,1),(1,1,\omega)\rangle\cap SL(3,k).$$

$(\omega^3=1,\ \omega\neq1)$ のとき，R は C.I. でない.

次に，

Theorem. ([11]). $G\subset GL(n,k)$, $|G|\neq0$ in k, $\forall g\in G$, $\mathrm{rank}(g-I)\geqq3 \Rightarrow R=S^G$ は "rigid singularity".

(つまり，deformation をもたない).

一方，R が C.I. なら R は必らず smooth deformation をもつから，

系. 7. $\forall g\in G$, $\mathrm{rank}(g-I)\geqq3$ ならば，R は C.I. でない。

一般に，R の最小生成元の個数はとめどもなく増えるが，R が C.I. と仮定すると，その増え方に強い制限がつく。

定理 8. (S. Goto - K. Watanabe) R が C.I. $\Rightarrow$ $\mathrm{emb}(R)\leqq 2n-1$.

(ここで，emb(R) は R の最小生成元の個数を示す).

この事実は次のような一般論の系として得られる。

<u>定義</u>（Lipman-Teissier, [8]）. A が Noeth. local ring $\dim A$ のとき，A が pseudo-rational singularity

$\Leftrightarrow$ ① A は normal, C-M. で，$\hat{A}$ は reduced.
② $\forall$ proper birational $\pi : Y' \to Y = \mathrm{Spec}(A)$, boundary hom. $H^n_m(A) \to H^n_E(Y', \mathcal{O}_{Y'})$ （$E = \pi^{-1}(m)$, m は A の max. ideal）は injective （云いかえれば，$H^0(Y', \omega_{Y'}) \to \omega_Y$ が surj.）

（ch(k)=0 で，A が k 上 ess. of fin. type 又は analytic ring のとき，pseudo-rational sing. $\Leftrightarrow$ rational sing.）

[8] で，「$\forall$regular local ring は pseudo-rational」が示されている。pseudo-rational sing. の環論的側面として，

<u>定理9.</u>（[8]）A が pseudo-rational n 次元 local ring のとき，I を A の ideal とするとき，$\forall \lambda \geq 1$, $\overline{I^{\lambda+n-1}} \subset I^\lambda$
（ここで ― は ideal の整閉包を表わす）

（定理8の略証）. $m = R_+ = \bigoplus_{n>0} R_n$, $A = R_m$ とおく．$f_1, \dots, f_n \in A$ を（必要なら，$|k| = \infty$ と仮定して）$m = \overline{(f_1, \dots, f_n)}$ なるようにとると，上の定理9より，$m^n \subset (f_1, \dots, f_n)$. 即ち，Artinian ring $A/(f_1, \dots, f_n)$ の max. ideal を $\bar{m}$ とおくとき，$\bar{m}^n = 0$. $\mathrm{emb}(A) = \mathrm{emb}(A/(f_1, \dots, f_n)) + n$ だから，次の補題に帰着する。

<u>補題</u>. (B, n) が Artin local ring で C.I., $\underbrace{\ }_{n^s=0} \Rightarrow \mathrm{emb}(B) \leq s-1$.

（略証）. $B = C/(a_1, \dots, a_r)$, C は r 次元 reg. local とする。C

の regular param. system を $\underline{x}=(x_1,\dots,x_r)$, $a_i=\sum c_{ij}x_j$ とおく. $r=\mathrm{emb}(B)$ と仮定して良い。すると, $(a_1,\dots,a_r)\in(\underline{x})^2$ だから, $c_{ij}\in(\underline{x})$。このとき, $(0:n)_B$ は $\det(c_{ij})$ の B への image で生成されている。$\det(c_{ij})\in(\underline{x})^r$, $n^s=0$ より $r\leqq s-1$

(証終).

定理9の特殊な場合として, $n=2$ の時を考えて見よう。上の記号で, $A/(f_1,f_2)$ の極大イデアルを $\bar{m}$ とおくと, Th 9 より $\bar{m}^2=0$ （2次元 "rational singularity" のこの性質は, M. Artin 以来良く知られている。）従って $\bar{m}=0:\bar{m}$.
更に, A が Gorenstein と仮定すると, $\bar{m}=0:\bar{m}$ の長さは 1 ∴ $\bar{m}$ は単項. ∴ $\mathrm{emb}(A)\leqq 3$. Th3 と併せて見ると, 有名な次の事実を得る。

<u>定理</u> 10. (Klein) G を $SL(2,k)$ の有限部分群, $G\neq\{1\}$, $|G|\neq 0$ in k $\Rightarrow$ $R=k[X,Y]^G$ は二次超曲面.
(即ち, $n=2$ のとき, R が Gorenstein $\Leftrightarrow$ R は超曲面)

ある reflection group $\tilde{G}$ に対し, $[\tilde{G},\tilde{G}]\subset G\subset\tilde{G}$ となるような群 G に対し, R が超曲面になるための条件は, 中島晴久 [9] の中で完全に決定されている。また, $G=\tilde{G}\cap SL(n,k)$ ($\tilde{G}$ は refl. group), Th. 6 の条件の下で, $A=\{d\}$ $(d=[\tilde{G}:G])$ のとき R が超曲面になる事を S. Goto - J. Watanabe が注意している。

§3. G が Abel 群のとき.

G が Abel 群のとき，G は対角化可能だし，R は monomials で生成される。R が C.I. となる R, G は完全に決定できる。ここでは結果だけを述べる事にし，証明に興味のある方は，[18] を参照して頂きたい。記述が若干面倒なので，まず，例から始めよう，$G \subset SL(n, k)$ $(n \leqq 4)$, $G \not\subset SL(n-1, k)$ で，R が C.I. になる例をすべて列挙する．(e_m は 1 の原始 m 乗根)

例 11. (i) $n=2$ (a) $G=\langle (e_m, e_m^{-1})\rangle$, $R=k[X^m, Y^m, XY]$.

(ii) $n=3$. (b) $G=\langle (e_m, e_m^{-1}, 1), (1, e_m, e_m^{-1})\rangle$, $R=k[X^m, Y^m, Z^m, XYZ]$.

(c) $G=\langle (e_a, e_a^{-1}, 1), (1, e_{ab}, e_{ab}^{-1})\rangle$, $R=k[X^a, Y^{ab}, Z^{ab}, XYZ, (YZ)^a]$

(iii) $n=4$. (d) $G=\langle (e_m, e_m^{-1}, 1, 1), (1, e_m, e_m^{-1}, 1), (1, 1, e_m, e_m^{-1})\rangle$,

$$R = k[X^m, Y^m, Z^m, W^m, XYZW]$$

(e) $G=\langle (e_a, e_a^{-1}, 1, 1), (1, e_a, e_a^{-1}, 1), (1, 1, e_{ab}, e_{ab}^{-1})\rangle$, $R=k[X^a, Y^a, Z^{ab}, W^{ab}, (ZW)^a, XYZW]$

(f) $G=\langle (e_a, e_a^{-1}, 1, 1), (1, e_{ab}, e_{ab}^{-1}, 1), (1, 1, e_{ab}, e_{ab}^{-1})\rangle$, $R=k[X^a, Y^{ab}, Z^{ab}, W^{ab}, (YZW)^a, XYZW]$

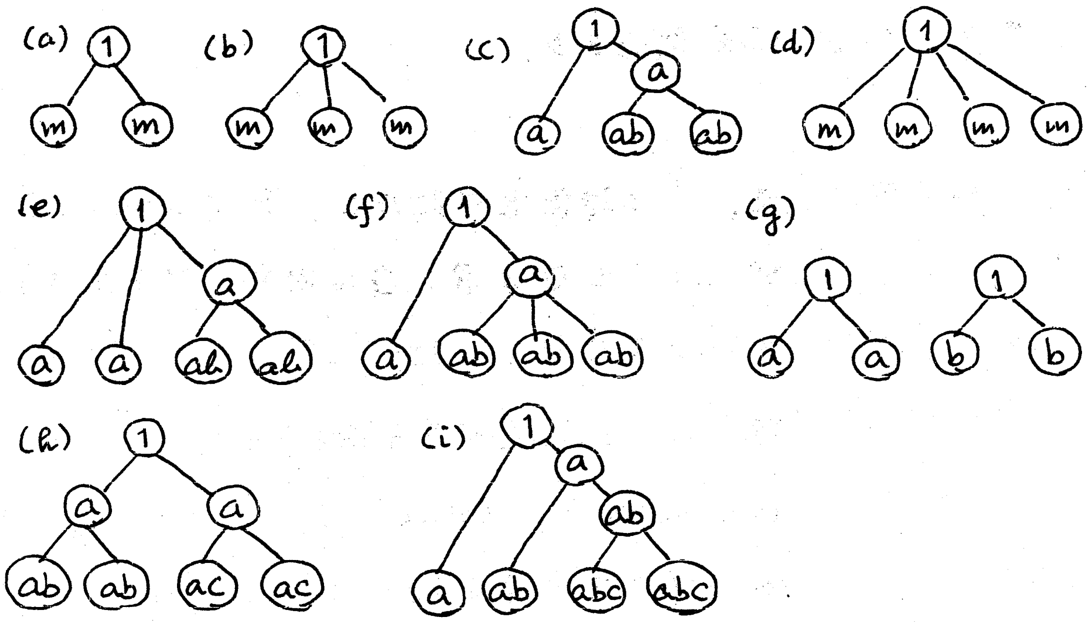
(g) $G=\langle (e_a, e_a^{-1}, 1, 1), (1, 1, e_b, e_b^{-1})\rangle$, $R=k[X^a, Y^a, XY, Z^a, W^a, ZW]$.

(h) $G=\langle (e_a, 1, e_a^{-1}, 1), (e_{ab}, e_{ab}^{-1}, 1, 1), (1, 1, e_{ac}, e_{ac}^{-1})\rangle$, $R=k[X^{ab}, Y^{ab}, (XY)^a, Z^{ac}, W^{ac}, (ZW)^a, XYZW]$

(i) $G=\langle (e_a, e_a^{-1}, 1, 1), (1, e_{ab}, e_{ab}^{-1}, 1), (1, 1, e_{abc}, e_{abc}^{-1})\rangle$

$$R = k[X^a, (YZW)^a, Y^{ab}, (ZW)^{ab}, Z^{abc}, W^{abc}, XYZW].$$

次の一般的定式化を見る前に上の例たちを下図のように図形化して見ると，解り易いと思う。



上図で，○がRの生成元を示している事はおわかりと思う。

<u>定義</u> 12. (i) special datum $\mathbb{D}=(D,w)$ とは，$I=\{1,2,\cdots,n\}$ の subsetsの部分集合 D と，$w : D \to \mathbb{Z}_+$ の組であって，

(1) $\forall i \in I$, $\{i\} \in D$

(2) $J, J' \in D$ のとき，J と J' には包含関係が成立するか，または $J \cap J' = \phi$.

(3) J が D の max. elem.（包含関係に関し）$\Rightarrow w(J)=1$.

(4) $J \subsetneq J'$ のとき，$w(J') \mid w(J)$, $w(J') < w(J)$.

(5) $J_1, J_2 \subset J$, J_1, J_2 と J の間に D の元はない $\Rightarrow w(J_1)=w(J_2)$.
（このとき，$J_1 \prec J$, $J_2 \prec J$ とかく）

(ii) spacial datum. $\mathbb{D}=(D,w)$ に対して，

$R_{\mathbb{D}} = k[X_J \,;\, J \in D]$, $X_J = \left(\prod_{i \in J} x_i\right)^{w(J)}$.

$G_{\mathbb{D}} = \{(e_w, e_w^{-1} \,;\, i,j) \mid i \in J_1, j \in J_2, J_1, J_2 \prec J, w = w(J_1) = w(J_2)\}$

（対角線の (i,i) 成分 a, (j,j) 成分 b，他の対角線成分がすべて

1の対角行列を $(a,b;i,j)$ と表記する.)

定理13. $G\subset SL(n,\mathbb{C})$, Abel 群, $R=S^G$ が C.I.

$\Rightarrow$ $\exists$special datum $\mathbb{D}=(D,w)$ s.t. $R\cong R_{\mathbb{D}}$ かつ G は $G_{\mathbb{D}}$ に共役.

(勿論, $R_{\mathbb{D}}$ は $G_{\mathbb{D}}$ の invariant subring である。)

§4. $n\leqq 3$ のとき.

(この § では $k=\mathbb{C}$ とする。)

$n=2$ のとき, Klein 以来有名な5種類の群が登場する。

定理14. $SL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群は巡回群 C_m, binary dihedral group $\mathbb{D}_m$ (位数 $4m$), binary tetrahedral group $\mathbb{T}$ (位数24), binary octahedral group $\mathbb{O}$ (位数48), binary icosahedral group $\mathbb{I}$ (位数120) のいずれかと共役である。(上のような群の不変部分環はそれぞれ, (A_{m-1}), (D_{m+2}), (E_6), (E_7), (E_8) の記号で表示される"有理二重点" である。)

$n=2$ のとき, 一応問題は定理10, 14で終っているとしよう。次に $n=3$ のときを考える。

$G\subset SL(3,\mathbb{C})$ を次の4つの場合に分けよう.

(1) Abel 群.

(2) G の表現が2次の既約表現と, 1次の表現の和になっているとき.

(3)　Gの表現は既約だが原始的でないとき．（即ち，Gは Abel 群と，$\mathfrak{A}_3$ 又は $\mathfrak{S}_3$ との　半直積；monomial group).

(4)　Gの表現が原始的であるとき．

(1)：GがAbel群の場合は，§3，定理13，例11で終りである。また，(4)の場合，このような群Gは6つしかなく，不変式も古くから計算され，いずれもC.I.となるRをもつ事が知られている。参考のため列挙すると（[1]，[10]，[14]参照）

(15)
原始的な $SL(3,\mathbb{C})$ の有限部分群及びその不変式環．

(A)　$G_A = \left\langle (1,\omega,\omega^{-1}),\ \begin{bmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1\\ 1&0&0 \end{bmatrix},\ \frac{-i}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1&1&1\\ 1&\omega&\omega^2\\ 1&\omega^2&\omega \end{bmatrix} \right\rangle$　$(\omega^3=1)$

とおくと，$|G_A| = 108$，　$R_A = S^{(G_A)} = \mathbb{C}[f_6, \phi_6, x, f_{12}, \Psi_{12}]$，但し，

$\phi_6 = s^2 - 18p^2 - 6ps$，$f_6 = s^2 - 12q$，$f_{12} = s^4 + 216p^3 s$，

$\Psi_{12} = ps^3 + 3p^2 s^2 - 18p^3 s$，　ここで，　$s = X^3+Y^3+Z^3$，$p = XYZ$，

$q = X^3Y^3 + Y^3Z^3 + Z^3X^3$，　$x = (X^3-Y^3)(Y^3-Z^3)(Z^3-X^3)$．

(B)　$G_B = \left\langle G_A,\ \frac{-i}{\sqrt{3}}\cdot\begin{bmatrix} 1&1&\omega^2\\ 1&\omega&\omega\\ \omega&1&\omega \end{bmatrix} \right\rangle$，　$|G_B| = 216$．とおくと，

$R_B = S^{(G_B)} = \mathbb{C}[f_6, \phi_6^2, x, f_{12}]$

(C)　$G_C = \langle G_A,\ (\theta,\theta,\theta\omega) \rangle$　$(\theta^3 = \omega^2)$．とおくと，

$R_C = S^{(G_C)} = \mathbb{C}[f_6^3, f_6 f_{12}, x, f'_{12}]$.，　$f'_{12} = p(27p^3 - s^3)$.

$|R_C| = 648$ である。

例(A)，(B)，(C) の Poincaré series はそれぞれ，

$P(R_A, t) = (1-t^{18})(1-t^{24})/(1-t^6)^2(1-t^9)(1-t^{12})^2$

$$P(R_B, t) = (1-t^{36})/(1-t^6)(1-t^9)(1-t^{12})^2.$$

$$P(R_C, t) = (1-t^{54})/(1-t^9)(1-t^{12})(1-t^{18})^2$$

で，実際に各Rは Poincaré series で示された次数の生成元と関係式をもっている。

(なお，上の結果は D. Rotillon 氏の労作である [10] から紹介させてもらったものである。R_A が C.I. である事は，実際に relation を求めても良いが，後述の定理16 からも出る.)

以下の3つの例は非常に有名なものである。

(D) $G \cong \mathfrak{A}_5$ (5次交代群),

$$G = \left\langle (1,-1,-1),\ \begin{bmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\1&0&0 \end{bmatrix},\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1&\mu_2&\mu_1\\ \mu_2&\mu_1&-1\\ \mu_1&-1&\mu_2 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad \mu_1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1),\ \mu_2 = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{5}-1)$$

$\tilde{G} = \langle G, -I \rangle$ が reflection group である事はすぐわかるので，Stanley の Th. 6 より，R は二次超曲面．$X^2+YZ \in R$ で，$R/(X^2+YZ)$ は2次元の (E_8)-singularity を与える．

R の Poincaré series は $P(R,t) = (1-t^{30})/(1-t^2)(1-t^6)(1-t^{10})(1-t^{15})$.

(E). $G = \langle \underset{\text{上の形での表現}}{\mathfrak{A}_5}\ ,\ \begin{bmatrix} -1&0&0\\0&0&-\omega\\0&-\omega^2&0 \end{bmatrix} \rangle$ このとき，Gの中心は $\overset{Z(G)}{\langle(\omega,\omega,\omega)\rangle}$ で，$G/Z(G) \cong \mathfrak{A}_6$ となる。従って，$|G|=1080$.

$\langle G, -I \rangle$ は reflection group で，$P(R,t) = (1+t^{45})/(1-t^6)(1-t^{12})(1-t^{30})$.

(F). $G = \left\langle (\beta, \beta^2, \beta^4),\ \begin{bmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\1&0&0 \end{bmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{-7}}\begin{bmatrix} a&b&c\\ b&c&a\\ c&a&b \end{bmatrix} \right\rangle, \quad \beta = \exp\frac{2\pi i}{7},$

$$a = \beta^4 - \beta^3,\quad b = \beta^2 - \beta^5,\quad c = \beta - \beta^6.$$

このとき $|G|=168$，$G \cong PSL(2,7)$．$\langle G, -I \rangle$ は reflection group で，$P(R,t) = (1+t^{21})/(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{14})$.

$F = X^3Y + Y^3Z + Z^3X$ は G-invariant で，$C=\{F=0\}\subset \mathbb{P}^2$ は，当然 G を自己同型群に含み（実は $\mathrm{Aut}(C)=G$）$|\mathrm{Aut}(C)|=168$ である genus 3 の curve の唯一つの例になっている。また，$R/(F) \cong \mathbb{C}[u,v,w]/(w^2+v^3+u^7)$．この群の invariant は Klein の本に出ている。

以上で，primitive group の分類は終りである。不思議に(?) R はすべて C.I. になった。次に進む前に我々の「基本定理」を述べておこう：

<u>定理</u>16. $G\subset SL(3,\mathbb{C})$ 有限群のとき，

$R=(\mathbb{C}[X,Y,Z])^G$ が完全交叉 $\Longleftrightarrow$ R は高々 5 個の元で生成される．

（証明）($\Rightarrow$) は定理 8 の special case（もっとも，筆者は M. Reid の "canonical 3-fold" を見て，$n=3$ のときは気がついたのだが）．($\Leftarrow$) は "codim. 2 の Gorenstein は C.I." という Serre の結果 [12] による．

(3) G が irreducible, imprimitive のとき，

このとき，G の Abelian subgroup H が存在して，$[G:H]=3$ 又は 6 である。$[G:H]=3$ のとき，

$G=\left\langle H, \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\right\rangle$ として良い事はすぐわかる。このとき H の $\mathbb{C}X\oplus\mathbb{C}Y$ への表現を H' とすると，次の事実は容易にチェックできる。

<u>補題</u> 17. $\mathrm{emb}(\mathbb{C}[X,Y,Z]^G) \leqq 5 \iff \mathrm{emb}(\mathbb{C}[X,Y]^{H'}) \leqq 5$.

（略証） $\mathbb{C}[X,Y]^{H'}$ の生成元を $X^a, Y^a, X^{b_1}Y^{c_1}, \ldots, X^{b_s}Y^{c_s}$

$(0<b_1<\cdots<b_s\leqq a,\ a>c_1>c_2>\cdots>c_s>0)$ とすると，$\mathbb{C}[X,Y,Z]^G$ の

生成元は XYZ, $X^a+Y^a+Z^a$, $X^{b_1}Y^{c_1}+Y^{b_1}Z^{c_1}+Z^{b_1}X^{c_1}$, $\ldots$, $X^{b_s}Y^{c_s}+Y^{b_s}Z^{c_s}+Z^{b_s}X^{c_s}$

で与えられる。但し，$S=0$ のとき $X^aY^a+Y^aZ^a+Z^aX^a$, $(X^a-Y^a)(Y^a-Z^a)(Z^a-X^a)$

が生成元に加わる。

$H'/\langle H'$の reflection$\rangle$ は cyclic group で，生成元を $\begin{bmatrix} e_n & 0 \\ 0 & e_n^q \end{bmatrix}$,

$(0<q<n,\ (q,n)=1)$ として良い。このとき，$\mathrm{emb}(\mathbb{C}[X,Y]^{H'})$

$= \sum_{i=1}^{t}(a_i-2)+3$，但し，$\frac{n}{q} = a_1 - \frac{1}{a_2 -}\cdots - \frac{1}{a_t}$ を $\frac{n}{q}$ の連分数

展開とする。

<u>補題</u> 18. $G = \left\langle (e_n, e_n^q, e_n^{q^2}),\ \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\1&0&0 \end{pmatrix} \right\rangle$，$1+q+q^2 \equiv 0\ (n)$,

$(q,n)=1$ のとき，R が C.I. $\iff (n,q)=(3,1)$ 又は $(7,2)$
$(0<q<n)$ $q<\frac{n}{2})$

（証明） $1+q+q^2\equiv 0\ (n)$，$\frac{n}{q} = a_1 - \frac{1}{a_2 -}\frac{1}{a_3 -}\cdots - \frac{1}{a_t}$ としたとき，$\sum(a_i-2)\leqq 2$ の2つの条件をみたす (n,q) が $(3,1)$ と $(7,2)$ だけである事を示せば良い．算術である。

あと，$G\subset SL(3,\mathbb{C})$，irred. monomial group で，R が C.I. となるものを数え上げるのは，ていねいに G を分類すれば良い。

<u>定理</u> 19. G が既約 monomial group $\subset SL(3,\mathbb{C})$ で，R が C.I. のとき，G は次のいずれかと共役．

(a) $G = \langle (e_n, e_n^{-1}, 1),\ (123) \rangle$

［以下に於て，$(123) = \begin{bmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\1&0&0 \end{bmatrix}$］

$$R=\mathbb{C}[XYZ,\ X^m+Y^m+Z^m,\ X^mY^m+Y^mZ^m+Z^mX^m,\ (X^m-Y^m)(Y^m-Z^m)(Z^m-X^m)]$$

(b) $G=\langle (e_m, e_m^{-1}, 1),\ (123),\ \omega I \rangle$ （$3 \nmid m$ とする）.

$$R=\mathbb{C}[XYZ,\ X^{3m}+Y^{3m}+Z^{3m},\ X^{2m}Y^m+Y^{2m}Z^m+Z^{2m}X^m,\ X^mY^{2m}+Y^mZ^{2m}+Z^mX^{2m}]$$

(c) $G=\langle (e_m, e_m^{-1}, 1),\ (123),\ (e_{7m},\ e_{7m}^{a},\ e_{7m}^{b}) \rangle$, $(m \geqq 1)$. $(a,7m)=1=(b,7m)$

$$R=\mathbb{C}[XYZ,\ X^{7m}+Y^{7m}+Z^{7m},\ X^{5m}Y^m+Y^{5m}Z^m+Z^{5m}X^m,\ X^{3m}Y^{2m}+Y^{3m}Z^{2m}+Z^{3m}X^{2m},$$
$$X^mY^{3m}+Y^mZ^{3m}+Z^mX^{3m}].$$ （relation の degree は $10m,\ 12m$）.

(d) $G=\langle (e_m, e_m^{-1}, 1),\ (123),\ -(12) \rangle$ （但し，$-(12)=\begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & & \\ & & -1 \end{bmatrix}$）

$$R=\begin{cases}\mathbb{C}[p^2,\ s,\ q,\ pr] & (m:\text{even}) \\ \mathbb{C}[p^2,\ ps,\ s^2,\ q,\ r] & (m:\text{odd})\end{cases}$$

但し，$p=XYZ$,
$$\begin{cases} s=X^m+Y^m+Z^m \\ q=X^mY^m+Y^mZ^m+Z^mX^m \\ r=(X^m-Y^m)(Y^m-Z^m)(Z^m-X^m)\end{cases}$$

$|G|=6m^2$，relation の degree は，

$6m+6$ （m : even），$(2m+6,\ 6m)$ （m : odd）.

(2) G が既約2次表現と一次表現の直和のとき．

このとき，$G \subset SL(3,\mathbb{C})$ と仮定したから，必然的に，

$G=\left[\begin{array}{c|c} \bar{G} & 0 \\ \hline 0 & \det^{-1} \end{array}\right]$ の形となる。$k=|\det G|$ とすると，

$k>1$ として良いのはあきらかである。従って，R の生成元は $\mathbb{C}[X,Y]^{\bar{G}}$ の生成元，$f(X,Y)\cdot Z^s$ の形の元，Z^k という事になる。$f(X,Y)\cdot Z$ の形の不変式は必らず存在するから，

$\mathrm{emb}(R) \leqq 5$ より，$\mathrm{emb}(\underbrace{\mathbb{C}[X,Y]^{\bar{G}}}_{R'}) \leqq 3$ を得る。

（一般に，$G=\left[\begin{array}{c|c} G_1 & 0 \\ \hline 0 & G_2 \end{array}\right]$ の形になっているとき，もし G の不変式環が C.I. であれば，G_1，G_2 の不変式環も C.I. で

ある事が [16] で示されている。) $\mathrm{emb}(R') = 2$ のとき，

$G = \left\langle \left(\begin{array}{c|c} \overline{G} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon \end{array}\right) \right\rangle \cap SL(3,\mathbb{C})$ で，$\overline{G}$ は reflection group だから，"R が C.I." の判定は Th. 6 に帰着する。

$\mathrm{emb}(R') = 3$ のとき，$R = \mathbb{C}[f, g, h, jZ, Z^k]$ の形しか有り得ない事は $\mathrm{emb}(R) \leqq 5$ より容易にわかる。j は定義より，$\forall \sigma \in \overline{G}$, $\sigma(j) = \det(\sigma)\cdot j$ を満足しなければならない。従って，$\overline{H} = \overline{G} \cap SL(2,\mathbb{C})$ とおくと，f, g, h を適当にとれば，$\mathbb{C}[X,Y]^{\overline{H}} = \mathbb{C}[f, g, j]$ となる筈である。ゆえに，「$\overline{G} = \langle \overline{H}, \sigma \rangle$ と書くとき，σ は $\mathbb{C}[X,Y]^{\overline{H}}$ の3つの生成元のうち，2つを不変にし，残りの一つ j に対して $\sigma(j) = \det(\sigma)\cdot j$ でなければならない」という事がわかる。共役を除いた $GL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群の分類は [3] に $\overline{G} = \langle \overline{H}, \sigma \rangle$ の形であるから，それをしらみつぶしに調べて行こうという訳である。

<u>定理</u> 20. $G = \left[\begin{array}{c|c} \overline{G} & 0 \\ \hline 0 & \det^{-1} \end{array}\right]$ の形で，R が C.I. になるものは次の通りである。($\overline{G}$ の記法は [3] のものを借用する。)

(I) $\overline{G}$ が reflection group のとき，

(a) R が hypersurface になる場合.

$\overline{G} =$ (i) $(\mu_6 | \mu_2 ; T | D_2)$, (ii) $\mu_6 T$, (iii) $(\mu_4 | \mu_2 ; O | T)$, (iv) $\mu_4 O$, (v) $\mu_{10} \cdot I$,
(vi) $\mu_6 I$, (vii) $\mu_4 I$, (viii) $G(2m, m, 2) = \left\langle \begin{pmatrix} e_{2m} & 0 \\ 0 & e_{2m}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

(b) $\mathrm{emb}(R) = 5$ となる場合.

$\overline{G} =$ (ix) $(\mu_8 | \mu_4 ; O | T)$, (x) $\mu_8 O$, (xi) $G(m, p, 2) = \left\langle (e_{2m}, e_{2m}^{-1}), (e_q, 1), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$

但し，$m = pq$，q は偶数．

(Ⅱ)．$\mathrm{emb}(\mathbb{C}[X,Y]^{\overline{G}}) = 3$ の場合．

$$\overline{G} = \overset{(\mathrm{xii})}{\mu_6 \cdot O},\ \overset{(\mathrm{xiii})}{\mu_4 \cdot T},\ \overset{(\mathrm{xiv})}{(\mu_4 | \mu_2 ; D_{2m} | D_m)}\ (m:\text{偶数}).$$

$$\overset{(\mathrm{xv})}{\mu_4 \cdot D_m} = \left\langle D_m, \begin{bmatrix} i & \\ & i \end{bmatrix} \right\rangle\ (m;\text{奇数})$$

以上．

§5．完全交叉となる R をすべて決定するために．

この問題に関して，可換環論からのアプローチが更にできるとするなら，次を証明する事だと思う．

<u>予想</u>．$G \subset SL(n, k)$，$|G| \neq 0$ in k．$R = k[X_1, \cdots, X_n]^G$ が C.I. $\Rightarrow$ G は $\{g \in G \mid \mathrm{rank}(g - I) = 2\}$ で生成されている(?)

G が Abel 群のとき定理13で見たように，この予想は正しい．また，$n=3$ のときこの予想が正しい事も個別に例をチェックする事によって験証する事ができる（筆者はそれ以外に証明を知らないが）．またこの予想の根拠は系7でおわかりと思う．特に G が単純群のときもこの予想は正しい事になる。但し，§1．(5)(ℓ) の例は G が単純群，$\{g \in G \mid \mathrm{rank}(g - I) = 2\}$ で生成されていても R が C.I. となるとは限らない事を示している。

この問題に関して，reflection group が非常に大きな意味をもっている事はおわかり頂けたと思う。G がある reflection group $\tilde{G}$ に含まれる事がわかると，議論が大変し易くなる。

Stanley は [16a] で

「 R が C.I. なら，ある reflection group $\tilde{G}$ で，

$[\tilde{G}, \tilde{G}] \subset G \subset \tilde{G}$ なるものが存在するか？」

という問を発したが、§1 の例 5 (a)，§4，(15) の例 C は，上の Stanley の予想が成立しない事を示している。（後者の例は Denis Rotillon さんに教えてもらった。筆者はこの群の位数を錯覚して，$\tilde{G} \cap SL(3, \mathbb{C})$ （$\tilde{G}$ は reflection group）と思っていて，[19] に於て次のような"予想"を書き「$n \leqq 3$ のときは正しい」と書いてしまったがこの場で謹んで訂正させて頂きたい．

「$G \subset SL(n, \mathbb{C})$，R が超曲面 $\Rightarrow \exists \tilde{G}$: refl. gr.，$G = \tilde{G} \cap SL(n, \mathbb{C})$?」

(15) C の例は，Shephard－Todd の分類によると，finite reflection group には含まれていない。）

$\{g \in G \mid rk(g - I) = 2\}$ で生成される有限群 G は [5]，[6] によって分類がされ始めている。（この論文は中島晴久さんに教えてもらいました） どうやら，"R が C.I. になるのはいつか？" というこのささやかな問題もそのうち解けそうである。

REFERENCES

[1] H.B.Blichfeld; Finite Collineation Groups, Univ. Chicago Press, 1917.

[2] C.Chevalley; Invariants of finite groups generated by reflections, Amer. J. Math. 67 (1955), 778-782.

[3] A.M.Cohen; Finite Complex Reflection Groups, Ann. E.N.S. 9 (1976), 379-436.

[4] M.Hochster and J.Eagon; Cohen-Macaulay rings, Invariant theory and the generic perfection of determinantal loci, Amer. J. Math. 93 (1971), 1020-1058.

[5] A.C.Huffman; Linear groups containing an element with an eigen space of codimension two, J. Alg. 34 (1975), 260-287.

[6] ________ ; Imprimitive Linear Groups generated by elements containing an eigenspace of codimension two, J. Alg. 63 (1980) 499-513.

[7] W.C.Huffman and N.J.A.sloane; Most Prinitive Groups have Messy Invariants, Adv. in Math. 32 (1979), 118-127.

[8] J.Lipman and B.Teissier; On a Theorem of Briançon-Skoda about integral closure of ideals, (preprint).

[9] 中島晴久; 超曲面となるような有限群の不変部分環について, (第3回代数セミナー報告集 (1980, 城崎), 164～184

[10] D.Rotillon; Groupes Lineaires Finis de Degre Trois et Anneaux d'invariants Intersections Completes, Preprint, Univ. Paris-Nord, Mars, 1981.

[11] M.Schlessinger; Rigidity of Quotient Singularities, Invent. Math. 14 (1971), 17-26.

[12] J.P.Serre; Sur les modules projectifs, Sem. Dubreil-Pisot, 1960/61, exp. 2.

[13] G.C.Shephard and J.A.Todd; Finite Reflection Groups, Canad. J. Math. 6 (1954), 274-304.

[14] T.A.Springer; Invariant Theory, Lect. Note in Math. 585, Springer, 1977.

[15] R.Stanley; Hilbert Functions of Graded Algebras, Adv. in Math. 28 (1978), 57-83.

[16] ______ ; Relative Invariants of finite Groups generated by Pseudo-reflections, J. Alg. 49 (1977), 134-148.

[16a] R.Stanley; Invarinats of Finite Groups and thier Applications to Combinatorics, Bull. A.M.S. 1 (1979), 475-511.

[17] K.Watanabe; Certain Invariant Subrings are Gorenstein, I,II, Osaka J. Math. 11 (1974), 1-8, 379-388.

[18] _______ ; Invarinat subrings which are Complete Intersections, I, (Invariant Subrings of Finite Abelian Groups), Nagoya Math. J. 77 (1980), 89-98.

[19] ______ ; Invariant Subrings of Finite Groups which are Complete Intersections, to appear in "Commutative Algebra: Analytic Methods" (Dekker, 1981).

[20] H.Nakajima; Invariants of Finite Groups Generated by Pseudo-reflections in Positive Characteristic, Tsukuba J. Math. 3 (1979), 109-122.

[21] 中島晴久 ; On Invariants of Unipotent Groups, 可換環論シンポジウム報告集 (1980, 大甲), 255~272.

(May 3, 1981)